Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet

Tézisfüzet

Izentrópok, Ljapunov exponensek és ergodikus átlagok

Keszthelyi Gabriella

Témavezető: Buczolich Zoltán
Egyetemi tanár, DSc

Doktori iskola: Mathematika
Iskolavezető: Jordán Tibor
Egyetemi tanár, DSc

Doktori program: Elméleti matematika
Programvezető: Szűcs András
Egyetemi tanár, az MTA levelezőtagja

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest

2019

1. Bevezetés

Ez a disszertáció a következő cikkeken alapul: *Equi-topological entropy curves for skew tent maps in the square* [16], *Isentropes and Lyapunov exponents* [17], *Convergence of ergodic averages for many group rotations* [15], mindegyik közös munka témavezetőmmel, Buczolich Zoltánnal.
Ebben a disszertációban bizonyos rendszereket vizsgálunk, illetve ezen rendszerek hosszútávú viselkedését és komplexitását. Többnyire alacsony dimenziós leképezéseket tekintünk, nevezetesen intervallum-leképezéseket, kivéve az utolsó szakaszban, ahol a kör forgatásait általánosítjuk csoport forgatásokra.
Általában topologikus illetve mértékelméleti fogalmakat használunk a rendszer vizsgálatára. A rendszert a következő fogalmakkal jellemezzük: topologikus entrópia, Ljapunov exponensek, invariáns mértékek, ergodicitás.

2. Előkészítés

A $T_{\alpha,\beta} : [0,1] \to [0,1]$ kétparaméteres sátorleképezéseket a következőképpen definiáljuk (lásd 1 ábra):

$$T_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha}x & \text{ha} \quad 0 \leq x < \alpha \\ \frac{\beta}{1-\alpha}(1-x) & \text{ha} \quad \alpha < x \leq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Az $T_{\alpha,\beta}$ intervallum-leképezés unimodális, szakaszonként monoton és korlátos változású. A triviális dinamika elkerülése végett $0.5 < \beta \leq 1$ és $\alpha \in (1-\beta, \beta)$ közötti tartományt vizsgálunk. (Triviális dinamika alatt azokat az eseteket értjük, amikor vagy egy vonzó, vagy pedig egy vonzó és egy taszító fixpont van. Ezekben az esetekben minden pontot beszippant a fixpont.) $\mathcal{U}$-val jelöljük az (α, β)-k azon $[0,1]^2$-beli tartományát, amikre nemtriviális a dinamika. Az $\mathcal{U}$-ból paraméterezett sátorleképezések expanzívak és két taszító fixpontjuk van, ami érdekes dinamikához vezet.

A sátor két szárát a következőképpen definiáljuk:

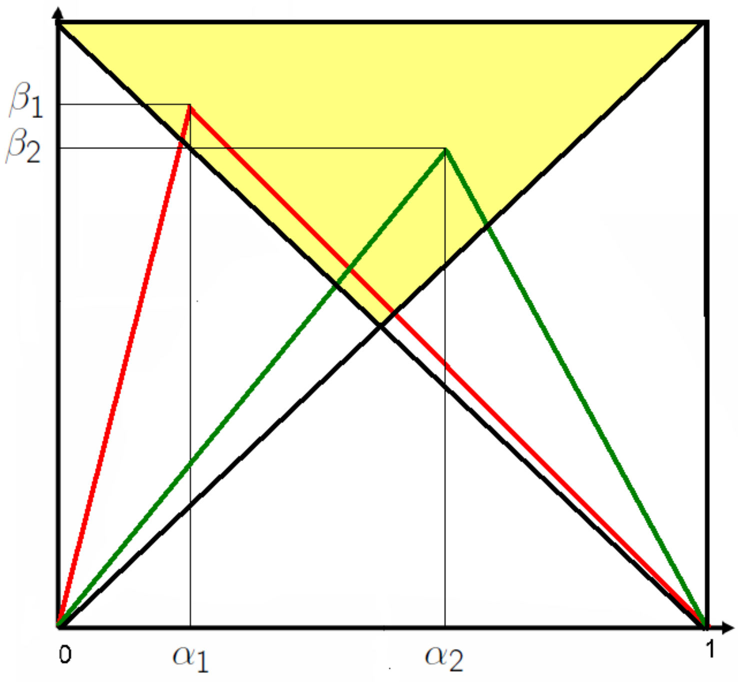
$$L_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha}{\beta}x \text{ és } R_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta}{1-\alpha}(1-x). \tag{2}$$

ahol $x \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $T = T_{\alpha,\beta}$ rögzített egy $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$-ra és $x \in [0,1]$. Definiáljuk $\underline{I}(x) = \underline{I}_{\alpha,\beta}(x)$-t az x **szimbolikus pályáját** a következőképpen:

(i) $\underline{I}(x)$ vagy L-eknek és R-eknek egy végtelen hosszú sorozata vagy L-eknek és R-eknek egy véges hosszú (esetleg üres) sorozata, ami C-re végződik. Az $\underline{I}(x)$ j-edik elemét $I_j(x)$-szel $j = 0, 1, \ldots$ jelöljük.

(ii) Ha $T^j_{\alpha,\beta}(x) \neq \alpha$ minden $j \geq 0$-ra ha $T^j_{\alpha,\beta}(x) < \alpha$ akkor $I_j(x) = L$, ha $T^j_{\alpha,\beta} > \alpha$ akkor $I_j(x) = R$.

(iii) Ha $T^k_{\alpha,\beta}(x) = \alpha$ valamilyen k-ra, akkor ha k_0 a legkisebb olyan k és $0 \leq l < k_0$ akkor ha $T^l_{\alpha,\beta}(x) < \alpha$, $I_{k_0}(x) = C$ és $I_l(x) = L$ és ha $T^l_{\alpha,\beta}(x) > \alpha$ akkor $I_l(x) = R$.



1. ábra. $\mathcal{U}$ paraméter-tartomány

$\underline{I}_E(x) = \underline{I}_{E,\alpha,\beta}(x) \in \{L, R, C\}^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$-vel jelöljük $T_{\alpha,\beta}$ **kiterjesztett szimbolikus pályáját**. Ha nincs C szimbólum $\underline{I}_E(x)$-ben akkor $\underline{I}(x) = \underline{I}_E(x)$, ha van benne C, akkor $\underline{I}(x)$ véges, és $\underline{I}_E(x)$ csak az $\underline{I}(x)$ végtelen ismétlődése. Jelöljük $K(\alpha, \beta) = \underline{I}_{\alpha,\beta}(\beta)$-val a $T_{\alpha,\beta}$ gyúrósorozatát (azaz az α szimbolikus pályáját).

Az L, R, C szimbólumok $\underline{M}$ sorozata megengedett akkor, ha egy L-ekből és R-ekből álló végtelen sorozat, vagy ha az $\underline{M}$ véges (esetleg üres) L-ek és R-ek véges sorozata ami C-vel zárul. Definiálhatunk egy $\prec$ rendezést a gyúrósorozatok között. A szimbólumok rendezése legyen $L \prec C \prec R$.
Legyen $\underline{A} = A_1 A_2 \ldots$, $\underline{B} = B_1 B_2 \ldots$.
Tegyük fel, hogy $A_j = B_j$ minden $j < i$-re , $A_i \prec B_i$ és
az R-ek száma $j = (i-1)$-ig **páros** akkor $\underline{A} \prec \underline{B}$,
az R-ek száma $j = (i-1)$-ig **páratlan** akkor $\underline{A} \succ \underline{B}$.

A $K(0.5, \beta)$, $\beta \in (0.5, 1]$-beli gyúrósorozatokat jelölje $\mathfrak{M}$. Ezek a $T_{\frac{1}{2},\beta}$ sátrakhoz tartoznak, ahol $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$.

$\mathfrak{M}_\infty$ jelölje azokat a gyúrósorozatokat $\mathfrak{M}$-ből, amikben C nem fordul elő. Ezek a végtelen sorozatok.

Másrészről $\mathfrak{M}_{<\infty}$ jelöli a véges sorozatokat. Ezek a C-re végződő sorozatok és pontosan ezek azoknak a $K(\alpha, \beta)$-nak felelnek meg, ahol az α periodikus. Továbbá ebben az esetben van egy Markov-partíciónk.

Tegyük fel, hogy $K(\alpha, \beta) = \underline{M} \in \mathfrak{M}$. Legyen $\underline{M}^- = \lim_{x \to \beta-} \underline{I}_{E,\alpha,\beta}(x)$. Látható, hogy $\underline{M}^-$ nem tartalmaz C-t.

2.1. Definíció. Legyen T egy szakaszonként monoton leképezés. Ha J egy maximális intervallum, amin $T|_J$ folytonos és monoton, akkor $T : J \to T(J)$-t a T **monotonitási intervallumának** nevezzük. Jelöljük $l(T)$-vel a T cikkcakkszámát.

Ezekre a T leképezéseknek a $h_{top}(T)$-vel jelölt topologikus entrópiájára a következők igazak:

2.2. Állítás. *Legyen $T : [0,1] \to [0,1]$-nek véges sok $l(T)$ darab cikkcakkja. Ekkor*

$$h_{top}(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log l(T^n) =$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#\{n\text{-periodikus pontok klasztere}\} = \max\{0, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log VT^n\}$$

ahol a két n-periodikus pont ugyanabba a klaszterba tartozik, ha a T^n ugyanahhoz a cikkcakkjához tartozik. Továbbá VT^n a T^n variációja.

3. Sátorleképezések I.

Ebben a szakaszban bemutatjuk az azonos gyúrósorozatú $\Psi_{\underline{M}}$ görbéket és a $\Theta_{\underline{M}}$ segédfüggvényt. A következő tétel a [36] 1. Tételének következménye:

3.1. Tétel. *Minden $\underline{M} \in \mathfrak{M}$-re léteznek $\alpha_1(\underline{M}) < \alpha_2(\underline{M})$ számok és $\Psi_{\underline{M}} : (\alpha_1(\underline{M}), \alpha_2(\underline{M})) \to \mathcal{U}$ folytonos függvény, hogy minden $(\alpha,\beta) \in \mathcal{U}$-ra $K(\alpha,\beta) = \underline{M}$ akkor és csak akkor teljesül ha $\beta = \Psi_{\underline{M}}(\alpha)$. A $\Psi_{\underline{M}}$ görbék kitöltik a teljes $\mathcal{U}$-t. Sőt, $\lim_{\alpha\to\alpha_1(\underline{M})+} \Psi_{\underline{M}}(\alpha) = 1$ ha $\underline{M} \succeq RLR^\infty$. Ha $\underline{M} \prec RLR^\infty$ akkor az $(\alpha, \Psi_{\underline{M}}(\alpha))$ görbe konvergál az $\{(\alpha, 1-\alpha) : 0 < \alpha < \frac{1}{2}\}$ vonalon egy ponthoz, ha $\alpha \to \alpha_1(\underline{M})+$. Ha $\underline{M} = RL^\infty$ akkor $\alpha_1(\underline{M}) = 0$, $\alpha_2(\underline{M}) = 1$ és $\Psi_{\underline{M}}(\alpha) = 1$ minden $\alpha \in (0,1)-re$. A $\Psi_{\underline{M}}$-ek az azonos gyúrósorozatú görbék.*

Megjegyzés. Ezeken a görbéken a $h(\alpha, \Psi_{\underline{M}}(\alpha))$ topologikus entrópia is megegyezik, ezért izentrópoknak is nevezzük őket.
Tegyük fel, hogy

$$\underline{M}^- = R\underbrace{L\dots L}_{m_1}R\underbrace{L\dots L}_{m_2}R\underbrace{L\dots L}_{m_3}R\dots. \tag{3}$$

Bevezetjük a $\overline{m}_k = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ jelölést.

3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\underline{M} \in \mathfrak{M}\backslash\{RL^\infty\}$ adott. Ekkor létezik $\Theta_{\underline{M}} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, függvény, hogy minden $(\alpha,\beta) \in \mathcal{U}$-ra, amire $K(\alpha,\beta) = \underline{M}$ a $\Theta_{\underline{M}}(\alpha,\beta) = 0$. Továbbá,*

$$\Theta_{\underline{M}}(\alpha,\beta) = 1 - \beta + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)^k \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\overline{m}_k} = \tag{4}$$

$$1 - \beta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)^k \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\overline{m}_k}$$

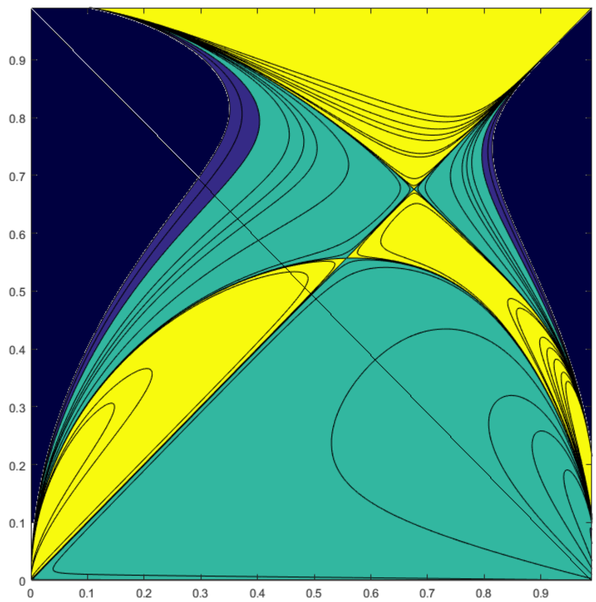
ahol $m_1 = \overline{m}_1 > 0$, $\overline{m}_k \le \overline{m}_{k+1} \le \overline{m}_k + \overline{m}_1$, $k = 0,1,\dots$. Hs $\underline{M} = K(\alpha,\beta) \in \mathfrak{M}_{R,\infty}$ akkor létezik n hogy $\overline{m}_{k+1} = \overline{m}_k$ minden $k \ge n$-re.

Ez azt jelenti, hogy a $\Psi_{\underline{M}}$ része a $\{(\alpha,\beta)\in\mathcal{U}:\Theta_{\underline{M}}(\alpha,\beta)=0\}$-nak , azaz a $\Theta_{\underline{M}}$ nulla szintvonalainak. Továbbá $(\alpha,\Psi_{\underline{M}}(\alpha))$ izentróp kielégíti a $\Theta_{\underline{M}}(\alpha,\Psi_{\underline{M}}(\alpha))=0$ implicit egyenletet. Jó lenne, ha az $\mathcal{U}$-beli $\Theta_{\underline{M}}(\alpha,\beta)=0$ nulla szintvonalak megegyeznének a $\Psi_{\underline{M}}$ görbével, de ez nincs egészen így. Ugyanakkor tudunk valami pozitívat mondani?

3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\underline{M}\in\mathfrak{M}\setminus\{RL^\infty\}$ adott, $(\alpha,\beta)\in\mathcal{U}$ és $K(\alpha,\beta)=\widetilde{\underline{M}}\succ\underline{M}$. Ekkor $\Theta_{\underline{M}}(\alpha,\beta)\neq 0$.*

Ez azt mutatja, hogy az $(\alpha,\Psi_{\underline{M}}(\alpha))$, $\alpha\in(\alpha_1(\underline{M}),\ \alpha_2(\underline{M}))$ felett $\mathcal{U}$-ban a $\Theta_{\underline{M}}$ segédfüggvény nem tűnik el. Sajnos ugyanez nem mondható el a $\Psi_{\underline{M}}$ alatti területről.

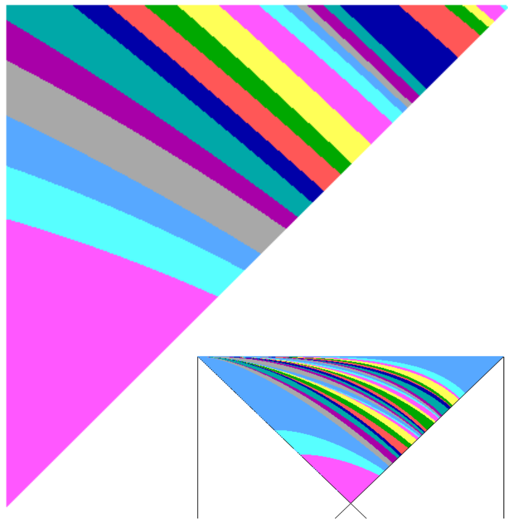
3.4. Tétel. *Létezik $\underline{M}\in\mathfrak{M}_\infty\setminus\{RL^\infty\}$ hogy valamilyen $(\alpha,\beta)\in\mathcal{U}$-re $\Theta_{\underline{M}}(\alpha,\beta)=0$ teljesül, de $K(\alpha,\beta)=\widetilde{\underline{M}}\neq\underline{M}$. A 3.3 tétel szerint $K(\alpha,\beta)\prec\underline{M}$. (Egy ellenpélda látható a 2 ábrán.)*



2. ábra. $\Theta_{\underline{M}}$*szintvonalai*, $\underline{M}=RLLRLRRLR^\infty$.

3.5. Lemma. *Minden $\underline{M}\in\mathfrak{M}\setminus\{RL^\infty\}$-re a $\Theta_{\underline{M}}(\alpha,\beta)$ végtelenül sokszor differenciálható $\mathcal{U}$-ban és a $\{(\beta,\beta):\frac{1}{2}<\beta<1\}$ pontok kis környezetében.*

M. Misiurewicz kérdezte, hogy vajon az izentrópok merőlegesek-e az átlóra? A $\Theta_{\underline{M}}$ segítségével megmutatjuk, hogy $(\alpha,\Psi_{\underline{M}}(\alpha))$ a $\{(\beta,\beta):0.5<\beta<1\}$-re majdnem merőleges ha (β,β) közel van az $(1,1)$-hez. (Lásd 3. ábra). A $\Psi_{\underline{M}}$ görbék nem feltétlenül merőlegesek az átlóra, például $\underline{M}=RLLRC$-re a $(\alpha,\Psi_{\underline{M}}(\alpha))$ nem, de $\underline{M}=RLC$ merőleges az átlóra.
A következő állítás szerint, ahogy a jobb felső sarokhoz közelítünk az izentrópok majdnem merőlegesek az átlóra.



3. ábra. Egyforma gyúrósorozatú görbék felnagyítva $(1/2, 1/2)$ közelében

3.6. Tétel.

$$\lim_{\beta_0 \to 1-} D_\alpha \Psi^{\beta_0}(\beta_0) = -1. \tag{5}$$

Ahol $D_\alpha \Psi^{\beta_0}$ *a* Ψ^{β_0} *deriváltja. Eszerint a* Ψ^{β_0} *görbék majdnem merőlegesek a* $\{(\beta, \beta) : \frac{1}{2} < \beta < 1\}$ *átlóra a* (β_0, β_0) *pontban, amikor* β_0 *közel van* 1*-hez.*

4. Sátorleképezések II.

Ebben a szakaszban a $\Psi_{\underline{M}}$ differenciálhatóságával és a $\Psi'_{\underline{M}}$ és a Ljapunov exponensek közötti kapcsolattal fogallkozunk.

4.1. Definíció. Kétparaméteres sátorra $T_{\alpha,\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$ esetén definiáljuk Frobenius-Perron operátort $P_{\alpha,\beta} : L^1[0,1] \to L^1[0,1]$-t a következőképpen:

$$P_{\alpha,\beta} f(x) = \sum_{z \in \{T^{-1}_{\alpha,\beta}(x)\}} \frac{f(z)}{|T'_{\alpha,\beta}(z)|},$$

egy kicsit konkrétabban

$$P_{\alpha,\beta} f(x) = \frac{\alpha}{\beta} f\left(\frac{\alpha x}{\beta}\right) + \frac{1-\alpha}{\beta} f\left(1 - \frac{1-\alpha}{\beta} x\right) \text{ if } 0 \le x \le \beta, \tag{6}$$

és $P_{\alpha,\beta} f(x) = 0$ ha $x > \beta$.

4.2. Állítás. *[7] Legyen* $T : I \to I$ *nemszinguláris. Ekkor a* P_T *Frobenius-Perron operátorra teljesül, hogy* $P_T f^* = f^*$ *majdnem mindenütt, akkor és csak akkor ha a* $\mu = f^* \lambda$ *mérték* T*-invariáns azaz* $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ *minden* A *mérhető halmazra, ahol* $f^* \ge 0$, $f^* \in L^1$ *és* $\|f^*\|_1 = 1$*.(Azaz* $\mu(A) = \int_A f^* d\lambda$*.)*

Másképp fogalmazva a invariáns sűrűségfüggvény $P_{\alpha,\beta}$ fixpontja lesz. Emlékeztetjük az olvasót az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ valós függvény totális variációjára:

$$Vf = V_{[a,b]}f = \sup_{\mathcal{P}}\left\{\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\right\}$$

ahol sup az összes $\mathcal{P}=\{[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots[x_{n-1},x_n]\}$-re vétetik az $[a,b]$-n. Ha $V_{[a,b]}f<+\infty$ akkor f korlátos változású (BV) $[a,b]$-n.

4.3. Definíció. Tegyük fel, hogy $I=[a,b]$, $T:I\to I$. Az $[a,b]$ egy

$$\mathcal{P}=\{[a_0,a_1],[a_1,a_2],\dots,[a_{n-1},a_n]\}$$

partíciója Markov a T-re nézve, ha minden $i=1,\dots,n$ a $T|_{(a_{i-1},a_i)}$ transzformáció egy homeomorfizmus a $\mathcal{P}$ partíció elemeinek valamely összefüggő uniójára, azaz egy $(a_{j(i)},a_{k(i)})$ intervallumra.

Figyeljük meg, hogy, ha $T^n_{\alpha,\beta}(\beta)=\alpha$, akkor C megjelenik és $K(\alpha,\beta)\in\mathfrak{M}_{<\infty}$ ekkor a $\{0,\alpha,\beta,T_{\alpha,\beta}(\beta),\dots,T^{n-1}_{\alpha,\beta}(\beta),1\}$ pontokkal megadott partíció egy Markov partíció. Ha $T_{\alpha,\beta}$ szakaszonként expanzív és $1/|T'_{\alpha,\beta}|$ korlátos változású, akkor tartozik hozzá egy abszolút folytonos invariáns mérték, aminek sűrűségfüggvénye korlátos változású.
Ha $T:I\to I$ differenciálható, $\log|T|$ integrálható és μ egy T-invariáns mérték, akkor beszélhetünk Ljapunov exponensről:

$$\Lambda(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log|(T^N)'(x)|=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\log|T'(T^n(x))|.$$

Az irodalomban módszer több létezik Ljapunov exponensek kiszámítására/ megbecslésére kétparaméteres sátorleképezések esetén. Az első módszer egy számítógépes becslésen alapszik, amely vagy γ-t ($\gamma=\mu_{\alpha,\beta}[0,\alpha]$ a $\mu_{\alpha,\beta}$ abszolút folytonos invariáns mérték, röviden acim), vagy az $f_{\alpha,\beta}$ invariáns sűrűségfüggvényt becsli. A másik módszer (kifejtve [3]-ban) azon a tényen alapszik, hogyha $K(\alpha,\beta)\in\mathfrak{M}_{<\infty}$, akkor a $T_{\alpha,\beta}$ csúcsa periodikus és Markov partíciónk van $T_{\alpha,\beta}$-ra. A Markov partíció alapján egy lineáris egyenletrendszert kapunk és ennek megoldása lesz az $f_{\alpha,\beta}$ invariáns sűrűségfüggvény (az $\mu_{\alpha,\beta}$ acimra nézve). Ennek a számításnak a hátránya hogy az egyenletek száma megegyezik a Markov partíció elemeinek számával. Ha $K(\alpha,\beta)\in\mathfrak{M}_{\infty}$ akkor nincs Markov partíció, de a Markov partíciókhoz tartozó izentrópok sűrűn helyezkednek el $\mathcal{U}$-ban. Azonban ha a $T_{\alpha,\beta}$-t próbáljuk $\mathfrak{M}_{<\infty}$-beli (α_n,β_n) paraméterekkel közelíteni, akkor az egyenletek száma végtelenhez tart.

Ennek a szakasznak az első fő eredménye az invariáns sűrűségfüggvények közelítéséről szól:

4.4. Állítás. *Legyen* $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathcal{U}$ $n = 0, 1, \ldots,$*-re* $(\alpha_n, \beta_n) \to (\alpha_0, \beta_0)$ *és* $\mathcal{P}_n = \{[0, \alpha_n], [\alpha_n, 1]\}$. *Tegyük fel, hogy*

$$\begin{aligned} &\forall\, m \geq 1, \exists\, \delta_m > 0 \text{ hogy ha} \\ &\mathcal{P}_n^{(m)} = \bigvee_{j=0}^{m-1} T_{\alpha_n,\beta_n}^{-j}(\mathcal{P}_n) \text{ then } \min_{I \in \mathcal{P}_n^{(m)}} \lambda(I) \geq \delta_m > 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Ekkor:
(A) *Minden korlátos változású* f *sűrűségfüggvényre létezik* M *konstans, hogy minden* n*-re és* $k = 1, 2, \ldots$*-ra*

$$VP_{\alpha_n,\beta_n}^k f \leq M.$$

Ebből az következik, hogy minden n*-re létezik a* T_{α_n,β_n}*-nek* f_n *sűrűségfüggvénye és az* $\{f_n\}$ *halmaz egy prekompakt halmaz* $L^1([0,1], \lambda)$*-ban.*
(B) *Ezen felül, ha* $f_{n_k} \to f_0$ L^1*-ben akkor* f_0 T_{α_0,β_0}*-nak invariáns sűrűségfüggvénye.*

A második az izentrópok érintői és a Ljapunov exponensek közötti összefüggésről szól:

4.5. Állítás. *Tegyük fel, hogy* $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{U}$, $\underline{M} = K(\alpha_0, \beta_0) \in \mathfrak{M}_{<\infty}$, *és létezik minimális* $n_{\underline{M}} > 1$, *hogy* $T_{\alpha_0,\beta_0}^{n_{\underline{M}}}(\beta_0) = \alpha_0$. *Jelölje* $\Lambda = \Lambda_{\alpha_0,\beta_0}$ *a* T_{α_0,β_0} *Ljapunov exponensét és* $(\alpha, \Psi_{\underline{M}}(\alpha))$ *az izentrópot, ami kielégíti a* $\beta_0 = \Psi_{\underline{M}}(\alpha_0)$ *egyenletet. Feltesszük, hogy* $\Psi'_{\underline{M}}(\alpha_0)$ *létezik, azaz az izentróp differenciálható* α_0*-ban. Ekkor következő képletet kapjuk*

$$\Lambda_{\alpha_0,\beta_0} = \Lambda = \gamma \log \frac{\beta_0}{\alpha_0} + (1 - \gamma) \log \frac{\beta_0}{1 - \alpha_0}, \text{ ahol } \gamma \text{ kielégíti} \tag{8}$$

$$\gamma = \frac{\frac{\Psi'_{\underline{M}}(\alpha_0)}{\beta_0} + \frac{1}{1-\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{1-\alpha_0}} = \alpha_0(1 - \alpha_0)\frac{\Psi'_{\underline{M}}(\alpha_0)}{\beta_0} + \alpha_0 \text{ egyenletet.} \tag{9}$$

Sőt ha μ *jelöli* T_{α_0,β_0} *acim-ját, akkor*

$$\gamma = \mu([0, \alpha_0]). \tag{10}$$

Később ténylegesen bebizonyítjuk, hogy $\Psi_{\underline{M}}$-ek folytonosan differenciálhatók:

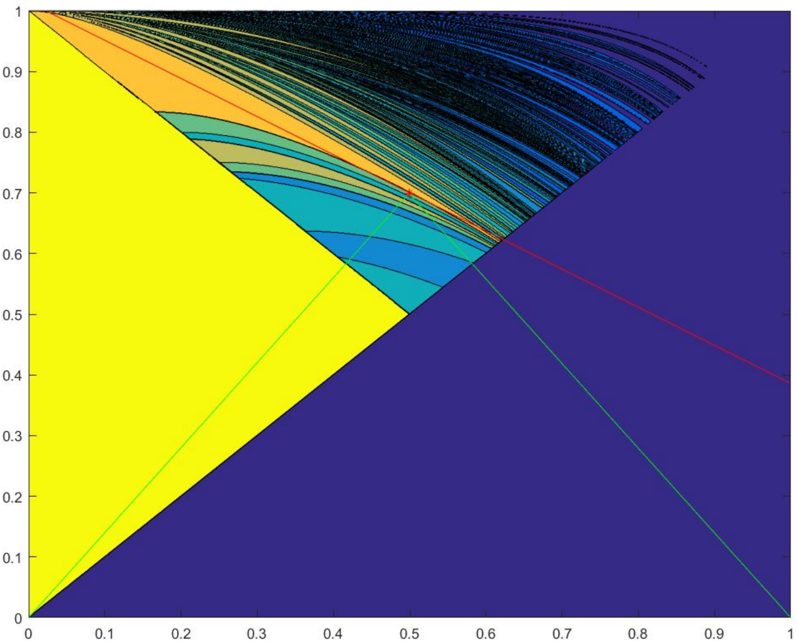
4.6. Tétel. *Ha* $\underline{M} \in \mathfrak{M}$ *akkor* $\Psi'_{\underline{M}}$ *létezik és folytonos* $(\alpha_1(\underline{M}), \alpha_2(\underline{M}))$*-en.*

Ekkor megkaphatjuk $\Psi_{\underline{M}}$-t implicit differenciálással.

$$\Psi'_{\underline{M}}(\alpha) = -\frac{\partial_1 \Theta_{\underline{M}}(\alpha, \Psi_{\underline{M}}(\alpha))}{\partial_2 \Theta_{\underline{M}}(\alpha, \Psi_{\underline{M}}(\alpha))}, \tag{11}$$

Mivel (4)-ben a sor exponenciális sebességgel konvergál, ezért ha a parciális deriváltakat tekintjük szintén egy exponenciális sebességgel fog konvergálni és így könnyű kiszámolni/megbecsülni a $\Psi'_{\underline{M}}(\alpha)$-t és így a Ljapunov exponenseket. A következő tétel azt mondja ki, hogy ezt meg tudjuk csinálni általános esetben is, amikor nincs Markov partíciónk.

4.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{U}$*,* $\Lambda = \Lambda_{\alpha_0,\beta_0}$ *a* T_{α_0,β_0} *Ljapunov exponense és* $(\alpha, \Psi_{\underline{M}}(\alpha))$ *izentróp kielégíti a* $\beta_0 = \Psi_{\underline{M}}(\alpha_0)$ *egyenletet. Ekkor* $\Psi'_{\underline{M}}(\alpha_0)$ *létezik, sőt* (8) *és* (9) *teljesül.*



4. ábra. $\Psi_{\underline{M}}$ érintője, $\underline{M} = K(0.5, 0.7)$, 5000 iterált

5. Birkhoff átlagok konvergenciája csoportforgatásokra

Birkhoff ergodtétele azt mondja ki hogyha van egy ergodikus transzformációnk és mértékünk, és ha veszünk egy L^1-beli f függvényt, akkor az időátlag és a tératlag meg fog egyezni ha N tart a végtelenbe:

$$\frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} f(T^i(x)) \to \frac{1}{\mu(X)}\int_X f d\mu = f^* \quad \mu \text{ m.m. } x.$$

A kiindulópont az volt, hogy vajon Birkhoff tétele általánosítható-e, ha olyan f függvényekre melyek feltétlenül Lebesgue integrálhatók. A legfőbb akadálya a Birkhoff tétel általánosításnak Major P. következő példája [32]. Létezik $S, T : X \to X$ két konjugált ergodikus transzformáció egy alkalmas (X, μ) valószínűségi mértéktéren

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(S^k(x)) = 0 \quad \mu \text{ m.m.}$$

és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(T^k(x)) = a \neq 0 \quad \mu \text{ m.m.}.$$

Később Laczkovich M. tette fel a kérdést, hogy Major példájában az X lehet-e a $\mathbb{T}$ kör és S, T két különböző irracionális forgatás.

Legyen $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ egy adott mérhető függvény. Egy $\alpha \in \mathbb{R}$-re legyen

$$M_N^{\alpha} f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f(x+k\alpha)$$

innentől kezdve ezt a konkrét időátlagot fogjuk használni. A válasz Laczkovich kérdésére igen, Buczolich Z. [12]-ben megmutatta, hogy bármely α_1, α_2 független irracionális számokra létezik $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, hogy $M_N^{\alpha_1} f(x) \to c_1$ és $M_N^{\alpha_2} f(x) \to c_2 \neq c_1$.

Néhány eredményünk érvényes nemkonvencionális ergodikus átlagokra is. $M_N^{\alpha} f(x)$-t úgy kapjuk, hogy a (k)-t megváltoztatjuk (n_k)-ra ami egészek szigorú monoton növekedő sorozata, és f-et pedig egy G kompakt Ábel csoport. Az f mérhető függvény néhány speciális forgatáshalmazát vizsgáljuk az m Haar mértékkel ellátott G csoporton:

$$\Gamma_f = \Big\{\alpha \in G : M_N^{\alpha} f(x) \text{ converges for } m \text{ m.m. } x \text{ as } N \to \infty\Big\}.$$

Bevezetünk néhány Γ_f-től némileg eltérő forgatáshalmazt is:

$$\Gamma_{f,0} = \Big\{\alpha \in G : \frac{f(x+n_k\alpha)}{k} \to 0 \text{ for } \quad m \text{ a.e. } x\Big\} \text{ és}$$

$$\Gamma_{f,b} = \Big\{\alpha \in G : \limsup_{k\to\infty} \frac{|f(x+n_k\alpha)|}{k} < \infty \text{ for } m \text{ a.e. } x\Big\}. \tag{12}$$

Nyilvánvalóan $\Gamma_f \subset \Gamma_{f,0} \subset \Gamma_{f,b}$. Láthattuk [12]-ben hogy ha $n_k = k$-t tekintjük, akkor $m(\Gamma_{f,0}) > 0$-ból következik, hogy $f \in L^1(\mathbb{T})$. Az utolsó szakasz fő tétele a következő:

5.1. Tétel. *Legyen (n_k) egészeknek egy szigorú monoton növekedő sorozata, és G egy kompakt lokálisan összefüggő Ábel-csoport a $f : G \to \mathbb{R}$ egy mérhető függvény, akkor $m(\Gamma_{f,b}) > 0$-ból következik, hogy $f \in L^1(G)$.*

A 5.1 tétel azt mondja ki, hogy ha nincs „túl sok torzió” $\widehat{G}$-ben ekkor $m(\Gamma_{f,b}) > 0$-ból következik, hogy $f \in L^1(G)$. Ha tekintünk egy Z_p-t (a p-adikus egészek csoportját) akkor a duálisa, $Z(p^\infty)$ elemei mind véges rendűek és „túl sok torzió” van a duálisban. Világos, hogy n_k aritmetikus tulajdonságai fontosak, ha Z_p-t tekintjük. Nagyon meglepőnek találtuk, hogy ha a szokványos ergodikus átlagokat nézzük (azaz $n_k = k$) akkor Z_p úgy viselkedik mint egy lokálisan összefüggő csoport és a következő állítás igaz:

5.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $n_k = k$ *és* p *egy rögzített prímszám. Tekintsük a* $G = Z_p$*-t a* p*-adikus egészek csoportját. Ekkor minden mérhető* $f : G \to \mathbb{R}$ *függvényre* $m(\Gamma_{f,b}) > 0$ *következik, hogy* $f \in L^1(G)$.

Ugyanakkor ez nem mondható el, ha a duális $\widehat{G}$ „végtelen sok többszörös torziót" tartalmaz. A G csoport végtelen sok többszörös torziót tartalmaz ha vagy van egy p prímszám hogy G tartalmaz egy részcsoportot, ami algebrailag izomorf $(Z/p) \bigoplus (Z/p) \bigoplus \ldots$ direkt összeghez vagy van végtelen sok prímszám $p_1, p_2, \ldots$ hogy G tetszőleges j-re tartalmaz $(Z/p_j) \times (Z/p_j)$ alakú részcsoportot.

5.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy* (n_k) *egészek egy szigorú monoton növekedő sorozata és* G *egy kompakt Ábel-csoport, melynek a duálisa* $\widehat{G}$ *végtelen sok többszörös torziót tartalmaz. Ekkor létezik* f *mérhető függvény, ami nem* $L^1(G)$*-beli, hogy*

$$m(\Gamma_{f,0}) = m(\Gamma_{f,b}) = 1, \text{ ahol } m \text{ a Haar-mérték } G\text{-n.} \tag{13}$$

Valójában megmutattuk, hogy $\Gamma_{f,0} = \Gamma_{f,b} = G$.

Hivatkozások

[1] I. Assani, Z. Buczolich and D. Mauldin
„An L^1 Counting problem in Ergodic Theory"
J. Anal. Math. **95** (2005), 221–241.

[2] J. Bell
„The Pontryagin duals of $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Q}$"
`https://pdfs.semanticscholar.org/bffd/643d972eab01c0b063c34ad1560791899d3a.pdf`

[3] L. Billings and E.M. Bollt
„Probability density functions of some skew tent maps"
Chaos Solitons Fractals **12**, No. 2, 365-376 (2001).

[4] A. B. Blaya and V. J. Lopez
„On the relations between positive Lyapunov exponents, positive entropy, and senstivity for interval maps"
Discrete and continuous dynamical systems Volume 32, Number 2, February 2012 pp. 433-466.

[5] V. Botella-Soler, J. A. Oteo, J. Ros, P. Glendinning
„Families of piecewise linear maps with constant Lyapunov exponent"
`https://arxiv.org/abs/1205.5360`

[6] J. Bourgain, H. Fürstenberg, Y. Katznelson, and D. S. Ornstein

„Pointwise Ergodic Theorems for Arithmetic Sets, with an Appendix”
Publ. Mat. IHES **69** (1989), 5-45.

[7] A. Boyarsky and P. Góra „Laws of chaos: invariant measures and dynamical systems in one dimension”
Boston: Birkhauser, 1997.

[8] Brucks, K., Bruin, H. (2004). „Topics from One-Dimensional Dynamics”
(London Mathematical Society Student Texts). Cambridge: Cambridge University Press.

[9] H. Bruin
„Notes on Ergodic Theory”
`https://www.mat.univie.ac.at/~bruin/ET3.pdf`

[10] H. Bruin and S. van Strien
„On the structure of isentropes of polynomial maps”
Dyn. Syst. **28** no. 3, 381-392 (2013).

[11] Z. Buczolich
„Almost everywhere convergence of ergodic averages”
Real Analysis Exchange. 34 (2009), no. 1, 1-15.

[12] Z. Buczolich,
„Arithmetic averages of rotations of measurable functions”
Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), no. 6, 1185–1196.

[13] Z. Buczolich
„Ergodic averages and free $\mathbb{Z}^2$ actions”
Fund. Math., **160**, (1999), 247-254.

[14] Z. Buczolich,
„Non-L^1 functions with rotation sets of Hausdorff dimension one”, *Acta Math. Hungar.* **126**, (2010) 23-50.

[15] Z. Buczolich, G. Keszthelyi
„Convergence of ergodic averages for many group rotations”
Ergodic Theory and Dynamical Systems, 36(7), 2107-2120.

[16] Z. Buczolich and G. Keszthelyi
„Equi-topological entropy curves for skew tent maps in the square.”
Math. Slovaca, **67**, No. 6, 1577–1594, (2017).

[17] Z. Buczolich, G. Keszthelyi
„Isentropes and Lyapunov exponents” (preprint)
`https://arxiv.org/pdf/1804.01837.pdf`

[18] Z. Buczolich and G. Keszthelyi
„Tangents of Isentropes of skew tent maps in the square.” (in preparation).

[19] Z. Buczolich and D. Mauldin
„Divergent Square Averages" *Ann. of Math.* **171**:(3) (2010), 1479-1530., 2010.

[20] Davoud Cheraghi and Tobias Kuna „Dynamical Systems" `http://wwwf.imperial.ac.uk/~dcheragh/Teaching/2016-F-DS-MPE.pdf`

[21] V. Climenhaga and A. Katok
„Measure theory through dynamical eyes"
`https://arxiv.org/pdf/1208.4550.pdf`

[22] P. Collet and J-P Eckmann
„Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems"
Originally published in the series of *Progress in Physics, 1980* Boston: Birkhauser, 2009.

[23] D. Fiebig, U. Fiebig and Z. Niteczki
„Entropy and preimage sets"
Ergodic Theory and Dynamical Systems, 23(6), 1785-1806. (2003)

[24] L. Fuchs,
„ Infinite Abelian groups Vol. I."
Pure and Applied Mathematics, Vol. 36 Academic Press, New York-London 1970.

[25] B. Hasselblatt, A. Katok
„Handbook of Dynamical Systems"
Elsevier B. V., 2006,

[26] E. Hewitt and K. A. Ross
„Structure of topological groups, integration theory, group representations"
Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Abstract harmonic analysis. Vol. I. **115** Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[27] M. Hochman
„Notes on ergodic theory"
`http://math.huji.ac.il/~mhochman/courses/ergodic-theory-2012/notes.final.pdf`

[28] F. Hofbauer, G. Keller
„Quadratic maps without asymptotic measure"
Commun. Math Phys Volume 127, Number 2 (1990), 319-337.

[29] Jonq Juang,Shih-Feng Shieh
„Piecewise linear maps, Liapunov exponents and entropy"
Journal of Mathematical Analysis and Applications Volume 338, Issue 1, 1 February 2008, Pages 358-364.

[30] D. Laiand, and G. Chen
„On statistical properties of the Lyapunov exponent of the generalized skew tent map"
Stochastic Anal. Appl., **20**(2), 375-388 (2002).

[31] D. Lindt, B. Marcus
„An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding"
Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[32] P. Major
„A counterexample in ergodic theory"
Acta Sci. Math. (Szeged) 62 (1996), 247-258.

[33] M. C. Mackey and M. Tyran-Kaminska
„Central limit theorem behavior in the skew tent map"
Chaos Solitons Fractals **38**, No. 3, 789-805 (2008).

[34] J. Milnor, W. Thurston
„On iterated maps of the interval"
In: Alexander J.C. (eds) Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics, vol 1342. (1988) Springer, Berlin, Heidelberg.

[35] J. Milnor and C. Tresser
„On entropy and monotonicity for real cubic maps"
With an appendix by Adrien Douady and Pierrette Sentenac. Comm. Math. Phys. **209**, *no. 1, 123-178 (2000).*

[36] M. Misiurewicz and E. Visinescu
„Kneading sequences of skew tent maps"
Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat. **27**, No. 1, 125-140 (1991).

[37] A. Radulescu
„The connected isentropes conjecture in a space of quartic polynomials"
Discrete Contin. Dyn. Syst. **19** no. 1, 139-175 (2007).

[38] J. M. Rosenblatt and M. Wierdl
„Pointwise ergodic theorems via harmonic analysis"
Ergodic theory and its connections with harmonic analysis (Alexandria, 1993), 3-151, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **205,** Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[39] W. Rudin,
„Fourier analysis on groups"
Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 12 Interscience Publishers (a division of John Wiley and Sons), New York-London 1962.

[40] Sylvie Ruette
„Chaos on interval"

University Lecture Series (Book 67) Publisher: American Mathematical Society (March 2, 2017).

[41] B. Saussol, S. Troubetzkoy and S. Vaienti
„Recurrence, dimensions and Lyapunov exponents”
Journal of Statistical Physics 106 (2002) 623-634.

[42] Ya. Sinai and C. Ulcigrai
„Renewal type limit theorem for the Gauss map and continued fractions”
Ergodic Theory Dynam. Systems, **28** (2008), no. 2, 643–655.

[43] Ya. Sinai and C. Ulcigrai
„A limit theorem for Birkhoff Sums of non-integrable functions over rotations”
Probabilistic and Geometric Structures in Dynamics Volume 469, 2008.
edited by K. Burns, D. Dolgopyat

[44] W. Srinin
„Measure theoretic aspects of dynamical systems”
http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Srinin.pdf

[45] R. Svetic „A function with locally uncountable rotation set”
Acta. Math. Hungar. 81(4) (1998), 305-314.

[46] „22nd Internet Seminar - Ergodic Theorems” https://ergodic.mathematik.uni-leipzig.de

[47] Ana Anušić „Dynamics of unimodal interval maps”
https://vd.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/p_vd/VDS_Mathematics/Minicourse_Anusic_neu.pdf *Notes for the mini-course at the University of Vienna, May 2017.*